

BÖLÜM III

LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

3.1 İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

İkinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem

$$(3.1) \quad a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer denklemin çözümünü aradığımız bir $[a, b]$ aralığında, $a_2(x) \neq 0$ ise o zaman bu denklem

$$(3.2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x) y = f(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu bölümde aksi söylenmedikçe p, q ve f fonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında sürekli olduklarını varsayacağız. Denklem (3.2) daha kısa olarak

$$(3.3) \quad L[y] = f$$

$$(3.4) \quad L = D^2 + p(x)D + q(x), \quad (D = d/dx)$$

şeklinde yazılabilir. Burada tanımlana $L : y \rightarrow L[y]$ lineer bir dönüşümdür (lineer transformasyon, lineer operatör). Bu lineer dönüşümün çekirdeği

$$(3.5) \quad \text{Ker}(L) = \{y \mid L[y(x)] = 0, \quad a \leq x \leq b\}$$

olarak tanımlanabilir. Yani başka bir ifade ile $Ker(L)$, $L[y]=0$ denkleminin çözüm kümesidir. Dolayısıyla, $y_1(x), y_2(x)$, $Ly=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise $Ker(L)=\{c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ kümesidir. Bu küme $C[a,b]$ uzayının bir alt uzayıdır ve boyutu 2 ye eşittir..

$L[y]=f$ denkleminin genel çözümü

$$(3.6) \quad y_g = y_c + y_p = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$$

şeklinde yazılabilir; burada $y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, (c_1, c_2 keyfi sabitler) $L[y]=0$ denkleminin genel çözümü, y_p de $L[y]=f$ denkleminin herhangi bir (özel) çözümüdür.

❖ TANIM 3.1 (Başlangıç Değer Problemi)

$$(3.7a) \quad L[y] = \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

$$(3.7b) \quad y(x_0) = \alpha, \quad y'(x_0) = \beta \quad (x_0 \in [a, b]) \quad (\text{başlangıç değerleri})$$

şeklinde tanımlanan bir probleme $L[y]=f$ için bir başlangıç değer problemi denir.

❖ **TEOREM 3.1** Başlangıç değer problemi (3.7) p, q, f fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ise her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için tek bir çözüme sahiptir.

Bu teoremin ispatı diferansiyel denklemlerle ilgili birçok kitapta bulunabilir onun için burada verilmeyecektir. ♣

3.2 LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Burada yalnızca ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri ele alınacaktır. Çünkü, genel sınır değer problemleri oldukça ileri seviyede analiz ve diferansiyel denklemler ile ilgili teorik bilgileri gerektirir.

$$(3.8) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad p, q \in C[a, b]$$

diferansiyel denkleminin çözümlerinin a ve b noktalarında verilen şartları sağlaması istenirse böyle bir probleme sınır değer problemi denir.

ÖRNEK 3.1

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

bir sınır değer problemidir. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümünün

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

olduğu açıktır. Sınır değerleri kullanılırsa $c_1 = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ bulunur. Dolayısıyla sınır değer probleminin çözümü

$$y = c_2 \sin x, \quad (c_2 \in \mathbb{R})$$

şeklindeki fonksiyonlar kümesinden oluşur. Yani başka bir ifade ile sonsuz sayıda çözüm vardır. Bu çözüm uzayı $\sin x$ fonksiyonunun doğurduğu alt uzaydır, dolayısıyla çözüm uzayının boyutu bire eşittir.

ÖRNEK 3.2

Bir önceki örnekteki problemin sınır değerlerini aşağıdaki şekilde değiştirelim

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0.$$

Genel çözümde sınır değerleri kullanılırsa $c_1 = 1$ ve $c_2 = 0$ olması gerektiği görülür. Dolayısıyla problemin çözümü yoktur: Sınır değer probleminin çözüm kümesi boş kümedir.

ÖRNEK 3.3

Aşağıdaki sınır değer problemlerinin her birinin tek çözüme sahip olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

- (a) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0.$ (Çözüm: $y = \cos x$)
 (b) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(\pi/2) = 0.$ (Çözüm: $y = 2 \cos x$)

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi bir sınır değer problemi

- (i) tek çözüme sahip olabilir;
- (ii) çok çözüme sahip olabilir;
- (iii) hiç çözüme sahip olmayabilir.

Genel olarak ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklem $L[y] = f$ için

$$(3.9) \quad (BC)_k(y) = a_{k1}y(a) + a_{k2}y'(a) + b_{k1}y(b) + b_{k2}y'(b)$$

$$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R} \quad (i, j = 1, 2)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $L[y] = f$ için bir lineer sınır değer problemi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

❖ TANIM 3.2 (Lineer Sınır Değer Problemi)

$$(3.10a) \quad L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (a < x < b; \quad p, q \in C[a, b])$$

$$(3.10b) \quad (BC)_1(y) = \alpha_1, \quad (BC)_2(y) = \alpha_2 \quad (\text{sınır şartları})$$

şeklinde verilen bir probleme lineer sınır değer problemi denir. Burada

$$(BC)_1(y), (BC)_2(y)$$

$$(BC)_k(y) = a_{k1}y(a) + a_{k2}y'(a) + b_{k1}y(b) + b_{k2}y'(b), \quad (k = 1, 2)$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse sınır şartlarında y ve y' lineer olarak görünmektedir, yani sınır şartları $y(a)y'(b)$, $\sin y(a)$, $y^2(a) + y^2(b)$ gibi terimleri içermemektedir. Bu yüzden yukarıda verilen tipteki sınır şartlarına **lineer sınır şartları** denir. Verilen diferansiyel denklem ve onunla ilgili sınır şartları lineer ise böyle bir probleme **Lineer Sınır Değer Problemi** denir. (3.10b) de verilen sınır şartları matris formunda ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} (BC)_1(y) \\ (BC)_2(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Problemin bir anlam kazanabilmesi için sınır şartlarındaki katsayıların aşağıdaki üç şartı da sağlaması gerekir:

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq [0], \quad (ii) \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \neq [0],$$

$$(iii) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = 2.$$

Aksi takdirde, örneğin (i) veya (ii) şartı sağlanmazsa problem başlangıç değer problemine dönüşür. Okuyucu, (ii) şartı sağlanmazsa ne olacağını bir örnekle görebilir.

Lineer sınır değer problemlerinin özel tipleri olarak aşağıdakiler verilebilir.

(i) **Homojen** sınır değer problemi (hem denklem hem de sınır şartları homojen):

$$(3.12) \quad (BVP)_h: \quad L[y] = 0, \quad (BC)_k(y) = 0, \quad (k = 1, 2)$$

(ii) **Yarı homojen** sınır değer problemi:

$$(3.13) \quad \textbf{Tip 1:} \quad L[y] = 0, \quad \{(BC)_k(y) = \alpha_k, \quad k = 1, 2\} \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0),$$

$$(3.14) \quad \textbf{Tip 2:} \quad L[y] = f, \quad (BC)_k(y) = 0, \quad (k = 1, 2), \quad (f \neq 0)$$

❖ **TEOREM 3.2** Homojen sınır değer problemi $(BVP)_h$ için tanımlanan

$$\begin{aligned} Ker(BVP) &= Ker\{L, (BC)_1, (BC)_2\} \\ &= \{y \mid L[y] \equiv 0, (BC)_1(y) = 0, (BC)_2(y) = 0\} \end{aligned}$$

kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzay homojen denklemin çözüm uzayının bir alt uzayıdır

İSPAT: $i = 1, 2$ için, $(BC)_i(u) = 0$ ve $(BC)_i(v) = 0$ olsun. O zaman her $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sayıları için $(BC)_i(c_1u + c_2v) = c_1(BC)_i(u) + c_2(BC)_i(v) = 0$ sağlanır. $Ker(L)$ kümesinin vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $u, v \in Ker(BVP)$ ise $c_1u + c_2v \in Ker(BVP)$ sağlanır. Diğer taraftan $Ker(BVP) \subset Ker(L)$ olduğundan $Ker(BVP)$, $Ker(L)$ uzayının bir alt uzayıdır. ♣

❖ **TEOREM 3.3**

$$(BVP)_1: \begin{cases} L[y] = f_1 \\ (BC)_i(y) = \alpha_i, \quad (i = 1, 2) \end{cases} \quad (BVP)_2: \begin{cases} L[y] = f_2 \\ (BC)_i(y) = \beta_i, \quad (i = 1, 2) \end{cases}$$

olsun. Eğer y_k , $(BVP)_k$ nın bir çözümü ise o zaman $c_1y_1 + c_2y_2$ fonksiyonu

$$(BVP): \begin{cases} L[y] = c_1f_1 + c_2f_2 \\ (BC)_1(y) = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2, \quad (BC)_2(y) = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 \end{cases}$$

sınır değer probleminin bir çözümüdür.

İSPAT (Okuyucuya bırakılmıştır). ♣

❖ **TEOREM 3.4** Herhangi bir homojen olmayan

$$(BVP): \quad L[y] = f, \quad \{(BC)_k(y) = \alpha_k, \quad k = 1, 2\} \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, f \neq 0)$$

şeklindeki bir sınır değer problemi, yarı homojen bir sınır değer problemi (3.13) veya (3.14) şekline dönüştürülebilir.

İSPAT :

(i) **Tip 1 şekline dönüştürme:**

y_p , $L[y] = f$ denkleminin bir özel çözümü (bulunabilir), y nin de (BVP) nin bir çözümü olduğunu kabul edelim (sadece çözüm olduğunu kabul ediyoruz, ne olduğunu bilmiyoruz). O zaman $u = y - y_p$ alınır

$$L[u] = L[y - y_p] = L[y] - L[y_p] = f - f = 0 \Rightarrow L[u] = 0.$$

Sınır şartları lineer olduğundan ($i = 1, 2$) için

$$\begin{aligned} (BC)_i(u) &= (BC)_i(y - y_p) \\ &= (BC)_i(y) - (BC)_i(y_p) \\ &= \alpha_i - (BC)_i(y_p) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece verilen (BVP), Tip 1 biçiminde

$$(3.18) \quad L[u] = 0, \quad (BC)_i(u) = \alpha_i - (BC)_i(y_p) = \alpha'_i, \quad (i = 1, 2)$$

yarı homojen sınır değer problemine dönüştürülmüş olur.

(ii) **Tip 2 şekline dönüştürme:**

Bunun için sınır şartlarını sağlayan (denklemi sağlaması gerekmiyor !) uygun bir $\psi(x)$ fonksiyonu bulmalıyız, mesela bir polinom kolayca bulunabilir. $y(x)$ fonksiyonunun (BVP) nin bir çözümü olduğunu kabul edelim. $u = y - \psi$ alınır

$$(3.19a) \quad L[u] = L[y] - L[\psi] = f - L[\psi] = F,$$

$$(3.19b) \quad (BC)_i(u) = (BC)_i(y - \psi) = (BC)_i(y) - (BC)_i(\psi) = 0$$

elde edilir. Bu da Tip 2 şeklinde yarı homojen bir sınır değer problemidir. ♣

❖ **TEOREM 3.5**

$$(BVP)_h : \begin{cases} L[y] = 0 \\ (BC)_1(y) = 0, (BC)_2(y) = 0 \end{cases}$$

homojen sınır değer problemini göz önüne alalım. φ_1, φ_2 $L[y] = 0$ homojen denkleminin lineer bağımsız herhangi iki çözümü ve $W = \text{Ker}(BVP)_h$ olsun. Ayrıca M matrisini

$$(3.20) \quad M = \begin{bmatrix} (BC)_1(\varphi_1) & (BC)_1(\varphi_2) \\ (BC)_2(\varphi_1) & (BC)_2(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlayalım. O zaman

$$\dim W = \text{nullity}(M) = 2 - \text{rank}(M)$$

sağlanır.

İSPAT: $y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ homojen denklemin genel çözümüdür. İkinci mertebeden homojen bir lineer denklemin çözüm uzayının boyutunun 2 olduğunu biliyoruz. Bu uzayı V ile gösterelim. W , V uzayının bir alt uzayı olduğundan $0 \leq \dim W \leq \dim V = 2$ olduğu açıktır. Şimdi c_1, c_2 keyfî sabitlerini, y fonksiyonu sınır değerlerini sağlayacak şekilde seçmek istiyoruz. Bunun için

$$(BC)_i(y) = c_1(BC)_i(\varphi_1) + c_2(BC)_i(\varphi_2) = 0, \quad (i = 1, 2)$$

ya da matris formunda

$$\begin{bmatrix} (BC)_1(\varphi_1) & (BC)_1(\varphi_2) \\ (BC)_2(\varphi_1) & (BC)_2(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sisteminin sağlanması gerekir. Diğer taraftan Lineer Cebirden biliyoruz ki $\mathcal{C}$, $Ax = 0$ şeklindeki $n \times n$ bir lineer sistemin çözüm uzayını gösterirse, $\dim \mathcal{C} + \text{rank} A = n$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $\dim W = \text{nullity}(M) = 2 - \text{rank}(M)$ sağlanır. ♣

❖ **SONUÇ 3.5.1** $\det M \neq 0$ ise homojen sınır değer probleminin tek çözümü $y \equiv 0$ çözümüdür.

❖ **TEOREM 3.6**

$$L[y] = f$$

$$(BC)_1(y) = \alpha_1, \quad (BC)_2(y) = \alpha_2$$

genel sınır değer problemi

- (i) $\det M \neq 0$ ise her f, α_1, α_2 için tek çözüme sahiptir (çözüm var ve tek);
- (ii) $\det M = 0$ ise f, α_1, α_2 değerlerine bağlı olarak ya sonsuz sayıda çözüme sahiptir ya da hiç çözüme sahip değildir.

İSPAT: $y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + y_p$, $L[y] = f$ denkleminin genel çözümü olsun. Burada c_1, c_2 keyfi sabitler, φ_1, φ_2 homojen denklemin lineer bağımsız herhangi iki çözümü, y_p de $L[y] = f$ denkleminin özel bir çözümüdür. Genel çözümün sınır şartlarını sağlaması için

$$(BC)_i(y) = c_1(BC)_i(\varphi_1) + c_2(BC)_i(\varphi_2) + (BC)_i(y_p) = \alpha_i, \quad (i = 1, 2)$$

sisteminin, ya da matris formunda

$$(3.21) \quad \begin{bmatrix} (BC)_1(\varphi_1) & (BC)_1(\varphi_2) \\ (BC)_2(\varphi_1) & (BC)_2(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - (BC)_1(y_p) \\ \alpha_2 - (BC)_2(y_p) \end{bmatrix}$$

sisteminin sağlanması gerekir. Bu cebirsel lineer sistemin tek çözüme sahip olması için katsayı matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekir, yani $\det M \neq 0$ olması gerekir.

Teoremin ikinci kısmı için (3.21) lineer sistemini göz önüne alalım. $\det M = 0$ ise, bu sistemin, f, α_1, α_2 değerlerine bağlı olarak, ya sonsuz sayıda çözümü vardır ya da hiç çözümü yoktur. Çözümün f fonksiyonuna bağlı olmasının nedeni y_p özel çözümünün bu fonksiyona bağlı olmasından kaynaklanır. ♣

Not: $Ax = b$ şeklindeki bir cebirsel lineer denklem sisteminin çözümlere sahip olması için gerekli ve yeterli şart b vektörünün (ya da sütun matrisinin) $A^*z = 0$ sisteminin tüm çözümlerine dik olması gerekir. Burada A^* , A matrisinin kompleks transpozudur. Bu matrise A matrisinin adjointi denir. Eğer yukarıdaki diklik şartı sağlanırsa $Ax = b$ sisteminin genel çözümü $y = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_mv_m + x_p$ olarak verilir. Burada $m \leq n$, x_p $Ax = b$ sisteminin özel bir çözümü, $y_c = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_mv_m$ de $Ax = 0$ homojen sisteminin genel çözümüdür.

3.3 KARŞILAŞTIRMA VE AYIRMA TEOREMLERİ

Katsayı fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli olmak üzere

$$(3.25) \quad a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (a \leq x \leq b)$$

lineer denklemini göz önüne alalım. $a \leq x \leq b$ için $a_2(x) \neq 0$ olsun.

❖ **TEOREM 3.7 (Sturm Ayırma Teoremi)** $u(x)$ ve $v(x)$ (3.25) denkleminin $[a, b]$ aralığında tanımlı lineer bağımsız herhangi iki çözümü ise u fonksiyonunun herhangi iki ardışık kökü arasında v fonksiyonunun tam olarak bir tane kökü vardır.

İSPAT: $u(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ardışık kökleri $x_1 < x_2$ olsun. (x_1, x_2) aralığında $v(x)$ fonksiyonunun bir köke sahip olduğunu göstermek istiyoruz. u ve v lineer bağımsız olduklarından bunların Wronsky determinantı $[a, b]$ aralığının ve dolayısıyla $[x_1, x_2]$ aralığının hiçbir noktasında sıfır olamaz, yani

$$W[u, v](x) = u(x)v'(x) - v(x)u'(x) \neq 0, \quad x \in [x_1, x_2]$$

sağlanır bu yüzden (x_1, x_2) aralığında işaret değiştirmez. $W[u, v](x) > 0$ kabul edelim. Bu durumda, $u(x_1) = u(x_2) = 0$ olduğundan

$$W[u, v](x_1) = -v(x_1)u'(x_1) > 0 \quad \text{ve} \quad W[u, v](x_2) = -v(x_2)u'(x_2) > 0$$

eşitsizlikleri sağlanır. u sürekli ve x_1, x_2 bu fonksiyonun ardışık kökleri olduğundan u , x_1 noktasında artan ise x_2 noktasında azalandır ya da tersi, yani $u'(x_1)u'(x_2) < 0$ sağlanır. $u'(x_1) > 0$ ve $u'(x_2) < 0$ kabul edelim (tersi kabul edilirse de aynı sonuca ulaşılır). Bu durumda yukarıdaki eşitsizlikler $v(x_1) < 0$ ve $v(x_2) > 0$ olmasını gerektirir. Buradan da, v sürekli olduğundan, ara değer teoremine göre (x_1, x_2) aralığında $u(c) = 0$ şartını sağlayan bir c değeri vardır.

Yukarıdaki işlemlerde u ile v fonksiyonları yer değiştirirse v fonksiyonunun ardıl herhangi iki kökü arasında u nun bir kökü olduğu ispatlanır. Bu da bize bu fonksiyonlardan birinin ardıl kökleri arasında diğ erinin sadece bir kökü olduğu sonucunu verir. ♣

❖ **TEOREM 3.8** $L[y] = y'' + p(x)y = 0$, $(p \in C[a, b], x_0 \in [a, b])$ olsun. Eğer φ bu denklemin $\varphi(x_0) = 0$ şartını sağlayan sıfırdan farklı bir çözümü ise φ , x_0 noktasında işaret değiştirir.

İSPAT: φ fonksiyonunun x_0 noktasında işaret değiştirmemesi için $\varphi'(x_0) = 0$ şartını sağlaması gerekir; çünkü aksi takdirde fonksiyon bu noktada ya artan ya da eksilen olacağından (bu durumda fonksiyonun grafiği x ekseninin altından üstüne yada tersi söz konusudur) işaret değiştirmek zorundadır ve dolayısıyla ispat edilecek bir şey yoktur.

$\varphi'(x_0) = 0$ olduğunu kabul edelim: (bir çelişki bulmaya çalışacağız)

O zaman φ fonksiyonu

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini sağlar. Ancak varlık teklik teoremine göre bu problemin tek çözümü $\varphi(x) \equiv 0$ çözümüdür, bu ise çelişkidir çünkü teoremin hipotezinde φ sıfırdan farklı bir çözüm olarak verilmişti. Dolayısıyla $\varphi'(x_0) = 0$ olamaz. ♣

❖ **TEOREM 3.9** φ ve ψ fonksiyonları

$$(3.27) \quad L[y] = y'' + p(x)y = 0, \quad (p \in C[a, b], \quad x_0 \in [a, b])$$

homojen denkleminin $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 0$ şartını sağlayan herhangi iki çözümü ise φ ve ψ lineer bağımlıdır.

İSPAT: $u(x) = \varphi'(x_0)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x_0)$ şeklinde tanımlana fonksiyon

$$\begin{cases} L[y] = 0 \\ y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini sağlar. Ancak bu denklemin tek çözümü sıfır çözümü olduğundan

$$u(x) = \varphi'(x_0)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x_0) \equiv 0 \Rightarrow \exists c \neq 0 \ni \psi(x) = c\varphi(x)$$

sağlanır, yani fonksiyonlar lineer bağımlıdır. ♣

❖ **$L[y] = 0$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN KÖKLERİ**

Yukarıda (3.27) ile verilen

$$L[y] = y'' + p(x)y = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin herhangi bir **sıfırdan farklı** çözümünün köklerinin sayısını incelemek istiyoruz.

Özel Durum: $p(x) = c = \text{sabit}$.

a) $c = 0$ ise: Genel çözüm $y = c_1x + c_2$ şeklindedir.

Bu durumda denklemin sıfırdan farklı herhangi bir çözümü en fazla 1 köke sahip olabilir.

b) $c = -\alpha^2 < 0, (\alpha > 0)$ ise: Genel çözüm $y = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}$ şeklindedir.

Bu durumda

i) $\{c_1 \neq 0, c_2 = 0\} \Rightarrow y = c_1e^{\alpha x} \neq 0$ dolayısıyla kök yok.

ii) $\{c_2 \neq 0, c_1 = 0\} \Rightarrow y = c_2e^{-\alpha x} \neq 0$ dolayısıyla kök yok.

iii) $\{c_1 \neq 0, c_2 \neq 0\} \Rightarrow y = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x} = 0 \Rightarrow Be^{2\alpha x} = 1$ şeklinde yazılabilir.

Buradan bir ve yalnızca bir tane kök olduğu görülür.

Sonuç: (b) durumunda, çözüm en fazla 1 köke sahiptir.

c) $c = \alpha^2 > 0$ ise: Genel çözüm $y = c_1 \sin \alpha x - c_2 \cos \alpha x$ şeklindedir. Bu çözüm

$$\rho = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad c_1 = \rho \cos \theta, \quad c_2 = \rho \sin \theta$$

alınarak

$$y = \rho \sin(\alpha x - \theta), \quad (\theta = \arctan(c_2 / c_1))$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda her sabit θ için sonsuz sayıda kök vardır, bu kökler

$$\sin(\alpha x - \theta) = 0 \Rightarrow \alpha x - \theta = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

bağıntısından

$$x_k = \frac{\theta + k\pi}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olarak elde edilir. Kökler arasındaki mesafe $|x_{k+1} - x_k| = \pi / \alpha$ olarak bulunur.

❖ **TEOREM 3.10** $[a, b]$ sınırlı herhangi bir aralık ve $y = \varphi(x)$

$$L_{p,q}[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (p, q \in C([a, b], \mathbb{R}))$$

denkleminin **sıfırdan farklı** herhangi bir çözümü olsun. O zaman φ , $[a, b]$ aralığında en fazla sonlu sayıda köke sahiptir.

İSPAT: Farz edelim ki φ $[a, b]$ -aralığında sonsuz sayıda köke sahip olsun ve bu kökler $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ olsun. O zaman **Bolzano-Weierstrass** Teoremine göre (x_n) dizisinin bir $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ şartını sağlayan bir alt dizisi (x_{n_k}) vardır.

$\varphi(x_{n_k}) = 0$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) ve φ sürekli olduğundan $\varphi(x_0) = 0$ sağlanır.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \varphi'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0$ (çelişki). ♣

❖ TEOREM 3.11 (Sturm Karşılaştırma Teoremi I)

i) $p_1, p_2 \in C[a, b]$, $p_1(x) \leq p_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$ ($p_1 \not\equiv p_2$) ve

ii) Φ_1, Φ_2 sırasıyla

$$y'' + p_1(x)y = 0 \quad \text{ve} \quad y'' + p_2(x)y = 0$$

denklemlerinin sıfırdan farklı çözümleri olsun.

O zaman, Φ_1 fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki herhangi iki kökü arasında Φ_2 nin en az bir kökü vardır.

İSPAT: Φ_1 çözümünün ardıl iki kökü $x_1 = c < x_2 = d$, ve (c, d) aralığında $\Phi_1(x) > 0$ kabul edelim. Φ_1 bu aralıkta negatif ise Φ_1 yerine $-\Phi_1$ alınarak aynı sonuca ulaşılır.

Φ_2 fonksiyonun (c, d) aralığında köke sahip olmadığını varsayalım:

Bu durumda ya $\Phi_2(x) > 0$ ya da $\Phi_2(x) < 0$ olmak zorundadır. $\Phi_2(x) > 0$ kabul edip

$$W(x) = W[\Phi_1, \Phi_2](x) = \Phi_1(x)\Phi_2'(x) - \Phi_2(x)\Phi_1'(x)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. O zaman

$$W(c) = \Phi_1(c)\Phi_2'(c) - \Phi_2(c)\Phi_1'(c) = -\Phi_2(c)\Phi_1'(c)$$

sağlanır. (c, d) aralığında $\Phi_1(x) > 0$, $\Phi_2(x) > 0$ olduğundan $\Phi_1'(c) > 0$ ve $\Phi_2(c) \geq 0$ sağlanır. Dolayısıyla

$$W(c) \leq 0$$

elde edilir. Aynı şekilde $W(d)$ hesaplanırsa

$$W(d) \geq 0$$

olması gerektiği sonucu ortaya çıkar. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} W'(x) &= \Phi_2''(x)\Phi_1(x) - \Phi_1''(x)\Phi_2(x) \\ &= (-p_2(x)\Phi_2(x))\Phi_1(x) - (-p_1(x)\Phi_1(x))\Phi_2(x) \\ &= (p_1(x) - p_2(x))\Phi_1(x)\Phi_2(x) \leq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $W(x)$, (c, d) aralığında artmayan bir fonksiyondur. Ayrıca $W(x)$, (c, d) aralığında, $\Phi_1(x) > 0$, $\Phi_2(x) > 0$, $\forall x \in (c, d)$ ve $p_1 \neq p_2$ şartlarından dolayı, sabit fonksiyon ve dolayısıyla sıfır fonksiyonu da olamaz. Bu da açıkça $W(c) \leq 0$ ve $W(d) \geq 0$ şartları ile çelişir. Dolayısıyla $\Phi_2(x)$, (c, d) aralığında hep pozitif ya da hep negatif olmaz; yani bu aralıkta en az bir köke sahip olması gerekir. ♣

❖ **SONUÇ 3.11.1** $0 < m \leq p(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ olmak üzere, $y = \varphi(x)$

$$y'' + p(x)y = 0, \quad a < x < b$$

denkleminin sıfırdan farklı herhangi bir çözümü olsun. O zaman

- i) $\varphi(x)$ uzunluğu $\geq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ olan herhangi bir aralıkta en az bir köke sahiptir;
- ii) Eğer $x_1 < x_2$, $\varphi(x)$ in ardışık iki kökü ise $x_2 - x_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ sağlanır.

İSPAT:

- i) Karşılaştırma teoreminde $p_1(x) = m$, $p_2(x) = p(x)$ alınır ve $y'' + my = 0$ denkleminin kökleri dikkate alınırsa sonuç elde edilir.
- ii) Karşılaştırma teoreminde $p_1(x) = p(x)$, $p_2(x) = M$ alınır ve $y'' + My = 0$ denkleminin kökleri dikkate alınırsa sonuç elde edilir. ♣

ÖRNEK 3.8

$y = \varphi(x)$, $y'' + x^2 y = 0$ denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü ise $[1, 5]$ aralığında en az ve en çok kaç köke sahip olabilir?

Çözüm: $y'' + \alpha^2 y = 0$ denkleminin genel çözümü $y = c_1 \sin \alpha x - c_2 \cos \alpha x$,

$$y = A \sin(\alpha x - \beta), \quad (A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \cos \beta = c_1 / A, \sin \beta = c_2 / A)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $y = A \sin(\alpha x - \beta)$ ile $y = \sin(\alpha x - \beta)$ fonksiyonlarının kökleri aynı olduğundan $A = 1$ alabiliriz. Bu fonksiyonun kökleri arasındaki mesafe π / α dır.

$$p(x) = x^2, \quad [1, 5] \text{ aralığında } m = \min p(x) = 1, \quad M = \max p(x) = 25$$

değerlerine sahiptir. Yukarıdaki çözümde $\alpha = \sqrt{m} = 1$ alınırsa $y = \sin(x - \beta)$ elde edilir. Bu fonksiyonun kökleri arasındaki mesafe π olduğundan $[1, 5]$ aralığında en az bir köke sahiptir. Dolayısıyla karşılaştırma teoremine göre $\varphi(x)$, $[1, 5]$ -aralığında **en az** bir köke sahiptir.

Aynı şekilde $\alpha = \sqrt{M} = 5$ alınırsa $y = \sin(5x - \beta)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun kökleri arasındaki mesafenin $\pi / 5$ olduğunu biliyoruz. İlk kök $x_0 = 1$ alınırsa (bunun için β uygun bir şekilde seçilebilir), diğer kökler sırasıyla

$$x_k = 1 + k \frac{\pi}{5} \leq 5, \quad k = 1, 2, \dots$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde elde edilebilir. Burada eşitsizliğin sağlanması için k en fazla 6 değerini alabilir. Dolayısıyla $y = \sin(5x - \beta)$, $[1, 5]$ aralığında en fazla 7 tane köke sahiptir.

Sturm karşılaştırma teoreminden ($p(x) = x^2 \leq 25$ olduğundan) $\varphi(x)$ fonksiyonu $[1, 5]$ aralığında **en fazla** $\lceil 4/(\pi/5) \rceil + 1 = \lceil 20/\pi \rceil + 1 = 7$ köke sahip olabilir.

Not: Genel olarak $y = \sin(\delta x - \beta)$ fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığında en fazla $\left\lceil \frac{b-a}{(\pi/\delta)} \right\rceil + 1$ tane köke sahiptir. (Bunu ispatlayınız.)

ÖRNEK 3.10

$y'' + e^x y = 0$ denkleminin sıfırdan farklı herhangi bir $\varphi(x)$ çözümü $[0, 4]$ aralığında en fazla kaç köke sahip olabilir.

Çözüm: $[0, 4]$ aralığında $1 \leq e^x < 3^4 = 81$ sağlandığından, yukarıdaki örneğe benzer şekilde işlem yapılırsa, $\varphi(x)$ fonksiyonunun bu aralıkta en fazla

$$\left\lfloor \frac{4}{(\pi/9)} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{36}{\pi} \right\rfloor + 1 = 12$$

tane köke sahip olabileceği görülür.

ÖRNEK 3.11

$$y'' + (e^x + \lambda)y = 0, \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

başlangıç değer probleminin çözümü her λ değeri için vardır ve tektir. Bu çözümü λ değerine bağlı olarak $y = \varphi(x; \lambda)$ ile gösterelim. Bu fonksiyonun λ ya göre sürekli olduğu gösterilebilir. Başlangıç şartından $y = \varphi(0; \lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ olduğunu biliyoruz; dolayısıyla $x_0 = 0$ her λ için bir köktür.

Şimdi $\lambda_1 < \lambda_2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots, \varphi(x; \lambda_1) \text{ fonksiyonunun ardışık kökleri,} \\ 0 = z_0 < z_1 < z_2 \dots, \varphi(x; \lambda_2) \text{ fonksiyonunun ardışık kökleri} \end{aligned}$$

olsun. O zaman karşılaştırma teoremine göre

$$x_1 < z_1$$

sağlanır.

❖ **TEOREM 3.12** λ reel bir parametre olmak üzere,

$$\begin{aligned} y'' + (p(x) + \lambda)y &= 0, \quad (\lambda \in \mathbb{R}, p \in C([0, b], \mathbb{R})) \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. $y = \varphi(x; \lambda)$ bu başlangıç değer probleminin çözümü, $(0, \varepsilon]$, $0 < \varepsilon \leq b$ herhangi bir aralık olsun. O zaman öyle bir μ sayısı vardır ki,

$$\lambda \geq \mu \Rightarrow \varphi(x; \lambda) \text{ fonksiyonu } (0, \varepsilon] \text{ aralığında en az bir köke sahiptir.}$$

İSPAT: $[0, b]$ aralığında $p_0 \leq p(x) \leq p_1$ olsun. λ

$$p(x) + \lambda \geq p_0 + \lambda \geq \alpha^2$$

şartını sağlayacak şekilde seçilebilir. Şimdi

$$y'' + \alpha^2 y = 0$$

denkleminin $y = \sin \alpha x$ çözümünü göz önüne alalım. Bu fonksiyonun kökleri $0, \pi/\alpha, 2\pi/\alpha, \dots$ olduğundan kökler arasındaki mesafe π/α ya eşittir. α keyfî olarak seçilebileceğinden, $(\pi/\alpha) \leq \varepsilon$ olacak şekilde alabiliriz.

Karşılaştırma teoremine göre α nın (dolayısıyla λ nın) yukarıdaki seçimi ile $y = \varphi(x; \lambda)$ çözümü $(0, \varepsilon]$ aralığında en az bir köke sahiptir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ♣

❖ YARDIMCI TEOREM 3.2

$$y = \varphi(x; \lambda)$$

$$y'' + (p(x) + \lambda)y = 0, \quad (\lambda \in \mathbb{R}, p \in C([0, \pi], \mathbb{R}))$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. O zaman (başlangıç noktasının bir komşuluğunda)

$$\frac{\partial \varphi(x; \lambda)}{\partial \lambda} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \varphi(x; \lambda)}{\partial x}$$

kısmi türevleri vardır ve (her iki değişkene göre de) süreklidir.

❖ TEOREM 3.14 λ bir parametre olmak üzere, $y = \varphi(x; \lambda)$

$$y'' + (p(x) + \lambda)y = 0, \quad (\lambda \in \mathbb{R}, p \in C([0, \pi], \mathbb{R}))$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. O zaman $\varphi(\pi; \lambda) = 0$ şartını sağlayan en az bir λ değeri vardır.

İSPAT: Eğer λ yeteri kadar büyük alınırsa, mesela

$$\lambda + p_0 \geq \varepsilon^2 > 0, \quad (p_0 = \min_{0 \leq x \leq \pi} p(x))$$

şartını sağlayacak şekilde alınırsa, karşılaştırma teoremine göre, $\varphi(x; \lambda)$ sonsuz sayıda köke sahiptir. Bu kökler, negatif olanlar bir kenara bırakılırsa, $x_1(\lambda)$

$$0 = x_0(\lambda) < x_1(\lambda) < x_2(\lambda) < \dots$$

şeklinde sıralanabilir. $\varphi(x; \lambda)$ çözümünün başlangıç değerlerini sağlaması gerektiğinden, ilk kök $x_0(\lambda) = 0$ dır. Dolayısıyla ilk pozitif kök $x_1(\lambda)$ dır.

Şimdi yeteri kadar büyük $\lambda_1 < \lambda_2$ değerlerini göz önüne alalım; öyle ki $\varphi(x; \lambda_1)$ sonsuz sayıda köke sahip olsun. O zaman, karşılaştırma teoremine göre, $x_1(\lambda_1) > x_1(\lambda_2)$ sağlanır. Dolayısıyla $x_1(\lambda)$, λ değişkenine göre azalan bir fonksiyondur. Yani λ büyüdükçe ilk pozitif kök sifıra yaklaşır. Başka bir deyişle $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_1(\lambda) = 0$ sağlanır.

❖ $x_1(\lambda)$ **sürekli**dir: (İspat için kapalı (implicit) fonksiyon teoremini kullanacağız.) $\lambda = \lambda_0$ alalım öyle ki $x_1(\lambda_0)$, $\varphi(x; \lambda_0)$ fonksiyonunun ilk pozitif kökü olsun. Şimdi $\varphi(x; \lambda) = 0$ eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliği sağlayan bir (x, λ) çifti vardır. Bunlardan bir tanesi $(x_1(\lambda_0), \lambda_0)$ çiftidir. Ayrıca varlık teklik teoremine göre $\varphi_x(x_1(\lambda_0); \lambda_0) \neq 0$ olduğundan kapalı fonksiyon teoremine göre λ_0 noktasının bir açık komşuluğunda sürekli hatta türevlenebilir bir $x = x_1(\lambda)$ fonksiyonu vardır.

❖ $x_1(\mu_0) > \pi$ olacak şekilde bir $\lambda = \mu_0$ değeri vardır. (Niçin?)

Yukarıdaki bilgiler ışığında, $\mu_0 < \mu_1$ olmak üzere $x_1(\mu_0) > \pi$ ve $x_1(\mu_1) < \pi$ şartlarını sağlayan μ_0, μ_1 değerleri vardır. Dolayısıyla, $x_1(\lambda)$ sürekli olduğundan $x_1(\lambda_1) = \pi$ şartını sağlayan bir $\lambda_1 \in (\mu_0, \mu_1)$ değeri vardır. Böylece ispat tamamlanır. ♣

❖ **TEOREM 3.15** $y = \varphi(x; \lambda)$

$$y'' + (p(x) + \lambda)y = 0, \quad (\lambda \in \mathbb{R}, p \in C([0, \pi], \mathbb{R}))$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. O zaman $\varphi(\pi; \lambda) = 0$ şartını sağlayan sayılabilir sonsuz sayıda $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$ değeri vardır.

İSPAT: Teorem 3.14 den $\varphi(\pi; \lambda) = 0$ şartını sağlayan en az bir λ_1 değeri vardır. λ_1 bu şartı sağlayan en küçük değer olsun. $\varphi(x; \lambda_1)$ sonsuz sayıda köke sahip olduğundan bu fonksiyonun diğer kökleri π den büyük olacaktır. Bu yüzden eğer $x_i(\lambda_1)$, $\varphi(x; \lambda_1)$ nin i ninci kökünü gösterirse, kökler

$$0 = x_0(\lambda_1) < x_1(\lambda_1) = \pi < x_2(\lambda_1) \dots$$

şeklinde sıralanabilir.

Sturm karşılaştırma teoremine göre $\mu \geq \lambda_1$ alınırsa $x_1(\mu) \leq \pi$ sağlanır. $x_1(\mu)$ sürekli ve azalan bir fonksiyon olduğundan (ki bunu Teorem 3.14 ün ispatı içinde göstermiştik) $\max_{\mu \geq \lambda_1} x_1(\mu) = x_1(\lambda_1)$ sağlanır. Eğer μ artırılırsa $x_1(\mu_0) < \pi$ ve $\varphi(x; \mu)$ nün ikinci pozitif kökü $x_2(\mu_0) > \pi$ olacak şekilde bir $\mu_0 > \lambda_1$ bulunabilir. $x_2(\mu)$ sürekli olduğundan (Teorem 3.14 deki şekilde gösterilebilir), $x_2(\lambda_2) = \pi$ olacak şekilde bir $\mu = \lambda_2 > \lambda_1$ vardır.

Aynı şekilde devam edilirse

$$x_j(\lambda_j) = \pi, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

olacak şekilde sayılabilir sonsuz sayıda $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ değeri bulunabilir. ♣

❖ **TEOREM 3.16 (Prüfer)** $y = u(x)$ fonksiyonu

$$(3.29) \quad \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = 0$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü ise

$$(3.30) \quad p(x)u'(x) = \rho(x)\cos\varphi(x), \quad u(x) = \rho(x)\cos\varphi(x)$$

değişken değişikliği (3.29) denklemini

$$(3.31) \quad \begin{cases} \varphi' = \frac{1}{p} \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi \\ \rho' = \left(\frac{1}{p} - q \right) \rho \sin \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

sistemine dönüştürür.

İSPAT: (3.30) eşitliklerinden

$$(3.32) \quad \rho = \sqrt{u^2 + p^2 u'^2}, \quad \varphi = \arctan \left(\frac{u}{pu'} \right)$$

elde edilir. Bu eşitliklerin x e göre türevleri alınır ve u nun diferansiyel denklemin çözümü olduğu dikkate alınırsa teoremin sonucu elde edilir. ♣

❖ **SONUÇ 3.16.1**

(3.29) denkleminde $p, p', q \in C[a, b]$ ve $p(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ olsun. Bu durumda eğer $y = u(x)$ denklemin sıfırdan farklı bir çözüm ise

$$u(x_1) = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

sağlanır. ♣

❖ **TEOREM 3.17** $y = u(x)$ fonksiyonu

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = 0, \quad p, p', q \in C[a, b], \quad p(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun. $u(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tam olarak n ($n \geq 1$) tane köke sahip olsun ve bu kökler $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ şeklinde sıralanmış olsun. O zaman (3.32) de tanımlanan $\varphi(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi(x) &> k\pi, & x_k < x \leq b \\ &< k\pi, & a \leq x < x_k \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

özelliklerini sağlar.

İSPAT: Sonuç 3.16.1 den $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarında $\varphi(x) \equiv 0$ sağlanır. Ayrıca bu noktalarda (3.31) den dolayı $\varphi'(x) = 1/p(x) > 0$ olduğundan $\varphi(x)$ her bir x_k noktasının bir komşuluğunda artan bir fonksiyondur. Bu yüzden eğer bir $\tilde{x} \in [a, b]$ için $\varphi(\tilde{x}) \geq m\pi$ sağlanırsa o zaman $\varphi(x) > m\pi \quad \forall x \in (\tilde{x}, b]$ sağlanır. Aynı şekilde, eğer $\varphi(\tilde{x}) \leq m\pi$ sağlanırsa o zaman $\varphi(x) < m\pi \quad \forall x \in [a, \tilde{x})$ sağlanır. ♣

❖ **TANIM 3.5 (Dini Türevleri)**

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, & D_+ f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D^- f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, & D_- f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Eğer fonksiyonun sağ(dan) türevi $f'_+(x)$ varsa

$$D^+ f(x) = D_+ f(x) = f'_+(x)$$

sağlanır. Aynı durum soldan türev için de geçerlidir, yani $f'_-(x)$ varsa,

$$D^-f(x) = D_-f(x) = f'_-(x)$$

sağlanır.

❖ **TEOREM 3.18** $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları bir $[x_0, b)$ aralığında sürekli ve bu aralıkta aşağıdaki şartlarını sağlayan herhangi iki fonksiyon olsun.

- i) $D_+u(x) \leq g(x, u(x))$
- ii) $D_+v(x) > g(x, v(x))$
- iii) $u(x_0) \leq v(x_0)$

O zaman

$$u(x) \leq v(x), \quad \forall x \in [x_0, b)$$

sağlanır.

Yukarıdaki (i), (ii), (iii) eşitsizliklerdeki D_+ , D^+ ile değiştirilirse yine aynı sonuç geçerlidir. ♣

❖ **TEOREM 3.19** Eğer Teorem 3.18 deki $g(x, y)$ fonksiyonu sürekli ve bir Lipschitz şartını sağlarsa o zaman teoremin (ii) inci şartındaki eşitsizlik işareti $\geq$ ile değiştirilebilir. ♣

❖ **TEOREM 3.20 (Sturm Karşılaştırma Teoremi II)**

$$(3.35) \quad \frac{d}{dx} \left[p_1(x) \frac{dy}{dx} \right] + q_1(x)y = 0, \quad \frac{d}{dx} \left[p_2(x) \frac{dy}{dx} \right] + q_2(x)y = 0$$

diferansiyel denklemleri için aşağıdaki 5 şart sağlanırsa

- i) $p_1, p_2, q_1, q_2 \in C[a, b]$;
- ii) $0 < p_2(x) \leq p_1(x), \quad q_2(x) \geq q_1(x)$;
- iii) $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ sırasıyla yukarıdaki denklemlerin sıfırdan farklı çözümleri;
- iv) $\frac{p_2(a)u'_2(a)}{u_2(a)} \leq \frac{p_1(a)u'_1(a)}{u_1(a)}$;
- v) $u_1(x)$ $[a, b]$ aralığında tam olarak n tane $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ köklerine sahip;

o zaman $u_2(x)$ fonksiyonu $(a, x_n]$ aralığında **en az** n tane köke sahiptir.

İSPAT: Her iki denklem için Prüfer dönüşümleri yapılırsa

$$(3.36) \quad \varphi_1' = \frac{1}{p_1(x)} \cos^2 \varphi_1 + q_1(x) \sin^2 \varphi_1,$$

$$(3.37) \quad \varphi_2' = \frac{1}{p_2(x)} \cos^2 \varphi_2 + q_2(x) \sin^2 \varphi_2$$

$$(3.38) \quad \varphi_i(x) = \arctan \left(\frac{u_i(x)}{p_i(x) u_i'(x)} \right), \quad 0 \leq \varphi_i < \pi, \quad i = 1, 2$$

elde edilir. (iv) şartından

$$0 \leq \varphi_1(a) \leq \varphi_2(a) < \pi$$

sağlanır. Şimdi, eğer

$$f_i(x, \varphi) = \frac{1}{p_i(x)} \cos^2 \varphi + q_i(x) \sin^2 \varphi, \quad i = 1, 2$$

olarak tanımlanırsa

$$f_1(x, \varphi) \leq f_2(x, \varphi), \quad \forall x \in [a, b]$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülür. Ayrıca bu fonksiyonların her biri φ ye göre Lipschitz şartını sağlar, dolayısıyla (3.37) denkleminin $(a, \varphi_1(a))$ noktasından geçen çözümü vardır ve tektir, aynı şekilde (3.38) denkleminin $(a, \varphi_2(a))$ noktasından geçen çözümü vardır ve tektir. Yukarıdaki bilgiler ve Teorem(3.15) kullanılırsa

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1' \equiv f_1(x, \varphi_1), \\ \varphi_2' \equiv f_2(x, \varphi_2), \\ \varphi_1(a) \leq \varphi_2(a), \\ f_1(x, \varphi) \leq f_2(x, \varphi), \quad \forall x \in [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

elde edilir. Dolayısıyla $\varphi_1(x_n) = m\pi \Rightarrow \varphi_2(x_n) \geq m\pi$ sağlanır. Teorem (3.*) uygulanırsa ispat tamamlanır. ♣

❖ **SONUÇ 3.20.1** Teorem (3.16) da (i), (ii) ve (iii) sağlanırsa $u_1(x)$ çözümünün herhangi iki kökü arasında $u_2(x)$ fonksiyonunun en az bir kökü vardır.

