

BÖLÜM I

GENEL TANIMLAR VE TEOREMLER

I.1 GİRİŞ

Bu bölümde kitabın akışı içinde gerekli olacağı düşünülen bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir. Bu tanımlardan ve teoremlerden bazılarını daha önceden biliyor olabilirsiniz, ancak yine de hatırlatmakta yarar olduğunu düşünüyorum. Genelde, teoremlerin ispatları verilmemiştir, bunun nedeni bunların analiz derslerinde ispat edilmiş ya da ispat edilmesi gerektiği içindir. Kaldı ki bazı teoremlerin ispatı bu kitabın seviyesinin üzerindedir; örnek olarak Lebesgue integrali ve ölçüm ile ilgili teoremler ve sonuçlar ileri seviyede analiz bilgisi gerektirmektedir. Burada esas amaç okuyucunun gerektiğinde bu teoremlerden yararlanması ya da en azından bunlardan haberdar olmasıdır.

1.2 GENEL TANIMLAR VE TEOREMLER

TANIM 1.1 METRİK ve METRİK UZAYI

E boş olmayan bir küme olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\rho : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir **metrik** (ya da **uzaklık fonksiyonu**) denir.

- i) $\rho(x, y) \geq 0$, ve $x = y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$
- ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in E$
- iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall x, y, z \in E$.

E , üzerinde tanımlanan bu ρ metriği ile beraber bir **metrik uzayı** oluşturur. Üzerinde hangi metriğin tanımlanmış olduğunu belirtmek amacıyla çoğunlukla (E, ρ) çifti ile gösterilir.

Örnek 1.1 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olsun. $E = \mathbb{F}^n$ kümesi üzerinde

$$(1.1) \quad \rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir metriktir. Bunun metrik olduğunu gösteriniz.

Örnek 1.2 $E = \mathbb{F}^n$ kümesi üzerinde

$$(1.2) \quad \rho(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right\}^{1/2}$$

bir metriktir.

Örnek 1.3 $E = C(A, \mathbb{F}) = \{f | f : A \rightarrow \mathbb{F} \text{ sürekli}\}$ sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde

$$(1.3) \quad \rho(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

şeklinde bir metrik tanımlayabiliriz. Bunun metrik olduğunu gösteriniz.

Örnek 1.4 $C([a, b], \mathbb{R}) = \{f | f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde

$$(1.4) \quad \rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun metrik olduğunu gösteriniz.

Örnek 1.5 Parçalı sürekli fonksiyonlar kümesi

$$(1.5) \quad E = C_p([a, b], \mathbb{R}) = \{f | f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ parçalı sürekli}\}$$

üzerinde, (1.4) de tanımlanan fonksiyon metrik **değildir**. (Nedenini açıklayınız).

TANIM 1.2 YARI METRİK

Eğer ρ , Tanım 1.1 deki şartların $\rho(f, g) = 0 \Rightarrow f = g$ şartı dışında tümünü sağlarsa o zaman ρ ya **yarı metrik** denir.

Örnek olarak, yukarıda bahsedilen, parçalı sürekli fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlanan

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir yarı metriktir. Nedenini açıklayınız.

TANIM 1.3 VEKTÖR UZAYI

V bir küme, $\mathbb{F}$ bir cisim olsun. Eğer V , üzerinde tanımlanan $\oplus : V \times V \rightarrow V$ ve $\otimes : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ işlemlerine göre aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathbb{F}$ üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olduğu söylenir ve yaygın olarak $V(\mathbb{F})$ şeklinde gösterilir:

A) Her $x, y, z \in V$ için, $\oplus$ (toplama olarak isimlendirilir) aşağıdaki şartları sağlar

- i) $x \oplus y = y \oplus x$
- ii) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
- iii) $\exists 0 \in V \ni \{ x \oplus 0 = x, \forall x \in V \}$
- iv)

Her $x \in V$ için, $x \oplus (-x) = 0$ şartını sağlayan bir $-x \in V$ elemanı vardır.

B) Her $x, y, z \in V$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için, $\otimes$ (çarpma) aşağıdaki şartları sağlar

- i) $(\alpha\beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$
- ii) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$
- iii) $(\alpha \oplus \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$
- iv) $1 \otimes x = x$ (1: cismin çarpmaya göre etkisiz elemanı)

Bu tanımda 0 (**toplamaya göre etkisiz eleman**) ve her bir x elemanına karşılık gelen $-x$ (**x in toplamaya göre tersi**) elemanlarının **tek** olması gerekir.

NOT: Biz bu kitapta $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alacağız.

Örnek 1.6 $V = \mathbb{F}^n$ üzerinde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ gibi herhangi iki elemanın toplamı

$$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

ve V deki herhangi bir elemanın **skalarla çarpımı** (yani $\mathbb{F}$ cisminin elemanları ile)

$$\alpha \otimes x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

olarak tanımlanırsa $\mathbb{F}^n(\mathbb{F})$ bir vektör uzayı olur.

Problem 1.1 $\mathbb{C}^n(\mathbb{R})$, $\mathbb{Q}^n(\mathbb{Q})$ ve $\mathbb{R}^n(\mathbb{Q})$ nün Örnek 1.6'da tanımlanan geleneksel toplama ve skalarla çarpma ile vektör uzayı olduklarını gösteriniz.

Örnek 1.7 $E = \{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{F}^n\}$ kümesi üzerinde, herhangi iki eleman $f, g \in E$ için

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(x) &= f(x) + g(x), & \forall x \in A \\ (\alpha \otimes f)(x) &= \alpha f(x), & \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in A\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa $E(\mathbb{F})$ bir vektör uzayı olur.

TANIM 1.4 **NORM ve NORMLU UZAY**

$E, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı, (biz burada $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alacağız), $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun

- N1) $x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \|x\| > 0$, ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
- N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in E$
- N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ (üçgen eşitsizliği)

Bu durumda $\| \cdot \|$ fonksiyonuna E kümesi üzerinde tanımlanmış bir **norm**, üzerinde bu şekilde bir norm tanımlanan E kümesine de **normlu uzay** denir ve $(E, \| \cdot \|)$ şeklinde gösterilir.

Bir küme üzerinde birden çok norm tanımlanabilir. Ayrıca, $\rho(x, y) = \|x - y\|$ bir metrik olduğundan, **her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır.**

Problem 1.2 (E, ρ) bir metrik uzayı olsun. ρ hangi şartları sağlarsa bu uzay aynı zamanda bir normlu uzay olur.

Örnek 1.8 $\mathbb{F}^n(\mathbb{F})$ vektör uzayı üzerinde aşağıdaki fonksiyonlar birer normdur.

- i) $\|x\|_{\infty} = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}$
- ii) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$
- iii) $\|x\|_2 = \sqrt{x^* x} = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right\}^{1/2}$ (**Euclid (Öklid) normu**)

Örnek 1.9 $\ell_{\infty} = \{ (a_n) \mid (a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{F}, |a_n| \leq M < \infty, \forall n \in \mathbb{N} \}$ sınırlı diziler uzayı üzerinde

$$(1.6) \quad \|x\|_{\infty} = \sup_n |a_n|, \quad x = (a_n)$$

ile tanımlanan fonksiyon bir normdur. Bu norm aynı zamanda uzayın kendisini tanımlamakta kullanılır.

Örnek 1.10 $\ell_1 = \{(x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ uzayı üzerinde

$$(1.7) \quad \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

bir normdur. Aynı şekilde $\ell_p = \{(x_n) \mid \{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\}^{1/p} < \infty\}$, $2 \leq p < \infty$ uzayları üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyon normdur.

$$(1.8) \quad \|x\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right\}^{1/p}$$

Örnek 1.11 $L_p[a, b] = \left\{ f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \right\}$, $1 < p < \infty$ uzayları üzerinde

$$(1.9) \quad \|f\|_p = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon norm değildir. Buradaki integral Lebesgue anlamındadır. Bununla beraber bu fonksiyon $L_p[a, b]$ üzerinde denklik sınıfları oluşturulur ve ölçüm kavramı dikkate alınırsa bir norm olur. Bu konular bu kitabın seviyesinin üzerindedir.

TANIM 1.5 BİR DİZİNİN YIĞILMA NOKTASI

(E, ρ) bir metrik uzay, (x_n) elemanları E kümesinden alınan bir dizi olsun.

x , (x_n) dizisinin bir **yığılma noktasıdır**

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ ve } \forall N \text{ için } \exists n \geq N \ni \rho(x_n, x) < \varepsilon$$

Bu tanımdan şu sonuca varılabilir: Eğer x dizinin bir yığılma noktası ise bu noktanın her açık komşuluğu dizinin sonsuz sayıda elemanını içerir.

Örnek olarak $x_n = (-1)^n$ dizisinin yığılma noktaları 1 ve -1 noktalarıdır.

TANIM 1.6 YAKINSAK DİZİ

a) (E, ρ) bir metrik uzay, (x_n) elemanları E kümesinden alınan bir dizi olsun.

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \ni \{n \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon\}$$

b) $(E, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, (x_n) elemanları E kümesinden alınan bir dizi olsun.

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \ni \{n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon\}$$

Yukarıdaki tanımlardan kolayca görülür ki, bir dizinin yakınsak olması için gerekli şart dizinin tek bir yığılma noktasına sahip olmasıdır. Herhangi bir dizinin limiti, aynı zamanda o dizinin bir yığılma noktasıdır.

TANIM 1.7 CAUCHY DİZİSİ

i) (x_n) **Cauchy dizisi**dir(*metrik uzayda*) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \ni \{n, m \geq N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon\}$

ii) (x_n) **Cauchy dizisi**dir(*normlu uzayda*) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \ni \{n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon\}$

Not: 1.7 (i, ii) tanımlarında N sayısı genelde verilen (ya da alınan) ε sayısına bağlıdır.

Problem 1.2 Bir metrik (veya normlu) uzayda herhangi bir yakınsak dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

TANIM 1.8 TAM METRİK UZAY ve TAM NÖRMLU UZAY

i) (E, ρ) uzayı **tam**dır $\Leftrightarrow$ Her Cauchy dizisi $(x_n) \subset E$ yakınsaktır ve limiti E dedir.

ii) $(E, \|\cdot\|)$ uzayı **tam**dır $\Leftrightarrow$ Her Cauchy dizisi $(x_n) \subset E$ yakınsaktır ve limiti E dedir.

Eğer bir normlu uzay tam ise **Banach uzayı** olarak isimlendirilir.

TANIM 1.9 DENK NÖRMLAR

$\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ bir E vektör uzayı üzerinde tanımlı iki norm olsun. O zaman

$$\|\cdot\|_1 \text{ ve } \|\cdot\|_2 \text{ normları denktir} \Leftrightarrow \exists k, K \in \mathbb{R}^+ \ni k\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq K\|x\|_2, \forall x \in E.$$

TEOREM 1.1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı tüm normlar birbirine denktir.

Problem 1.4 $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right\}^{1/2}$$

normlarının denk olduklarını gösteriniz.

TANIM 1.10 **KOMPAKT KÜME (metrik uzaylarda)**

(E, ρ) bir tam metrik uzay ve $F \subset E$ olsun. F nin **kompakt** olması için gerekli ve yeterli şart, elemanları F den alınan her sınırlı dizinin F içinde bir noktaya yakınsayan alt dizisinin olmasıdır.

TEOREM 1.2. $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ de bir kümenin **kompakt** olması için gerekli ve yeterli şart o kümenin **kapalı ve sınırlı** olmasıdır.

TEOREM 1.3. (E, ρ) bir tam metrik uzay ve $F \subset E$ **kompakt** bir alt küme ise, (F, ρ) da tam metrik uzaydır.

Örnek 1.12 Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$ metriği ile tamdır. Diğer taraftan rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, aynı metrik ile tam değildir; çünkü $x_n = (1 + 1/n)^n$ Cauchy dizisinin her elemanı rasyonel sayı olmasına rağmen dizinin limiti rasyonel değildir.

Problem 1.5 $E = \mathbb{R}$ ve $\rho_1(x, y) = |x - y|$, $\rho_2(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ olarak tanımlanıyor. $\{x_n | x_n \in \mathbb{R}, n = 0, 1, \dots\}$ dizisi bu metriklerden hangisine göre Cauchy dizisidir.

TANIM 1.11 **AÇIK KÜME**

$$A \text{ açık bir kümedir} \Leftrightarrow \forall a \in A \text{ için } \exists r > 0 \ni B_r(a) \subset A.$$

Burada $B_r(a) = \{x | \rho(x, a) < r\} = \{\text{merkezi } a, \text{ yarıçapı } r \text{ olan top}\}.$

TANIM 1.13 **BİR KÜMENİN TAMLAYANI**

$$A \subset E \text{ olsun. } \tilde{A} \text{ (veya } \sim A) = \{x | x \in E \text{ ve } x \notin A\}.$$

TANIM 1.14 KAPALI KÜME

A kapalı bir kümedir $\Leftrightarrow \tilde{A}$ açık bir kümedir.

TANIM 1.16 BİR KÜMENİN KAPANIŞI

$\overline{A} = A$ kümesinin kapanışı
 $= \{ \text{Elemanları } A \text{ dan alınan tüm sınırlı dizilerin yığılma (limit) noktaları} \}.$

Bu tanım kullanılarak kapalı küme ve yoğun kümenin tanımı

- a) A kapalı bir kümedir $\Leftrightarrow \overline{A} = A$.
- b) $A \subset E$, E nin **yoğun** bir alt kümesidir $\Leftrightarrow \overline{A} = E$

olarak ifade edilebilir. Buradaki (b) ifadesi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$A, E \text{ nin } \mathbf{yoğun} \text{ bir alt kümesidir} \Leftrightarrow \forall x \in E \text{ ve } \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists a \in A \ni \rho(a, x) < \varepsilon$$

Örnek olarak rasyonel sayılar kümesi, reel sayılar kümesinin yoğun bir alt kümesidir. Çünkü herhangi bir reel sayıya rasyonel sayılar tarafından istenildiği kadar yaklaşılabılır

TANIM 1.17 İÇ ÇARPIM ve İÇ ÇARPIM UZAYI

$E (\mathbb{F})$ bir vektör uzayı, $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \rightarrow \mathbb{F}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

- I1) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall x, y \in E$
- I2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x, y \in E$
- I3) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in E$
- I4) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Bu durumda $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ye bir **iç çarpım uzayı**, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ye de E üzerinde tanımlanmış bir **iç çarpım** denir. Bir küme üzerinde birden çok iç çarpım tanımlanabilir.

Örnek 1.13 $E = \mathbb{R}^n, \mathbb{F} = \mathbb{R}, \langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

Örnek 1.14 $E = \mathbb{C}^n, \mathbb{F} = \mathbb{C}, \langle x, y \rangle = y^H x = (\overline{y})^T x = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$.

Örnek 1.15 $E = \left\{ f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F}, \int_a^b w(x) |f(x)| dx < \infty, w(x) \geq 0, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$

Buradaki $w(x)$ fonksiyonuna **ağırlık fonksiyonu** denir. E -kümesi üzerinde

$$(1.10) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx, \quad \mathbb{F} = \mathbb{R}$$

$$(1.11) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \mathbb{F} = \mathbb{C}$$

şeklinde iç çarpımlar tanımlayabiliriz.

TEOREM 1.4. Bir iç çarpım uzayı üzerinde tanımlanan $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ bir normdur. Bu şekilde tanımlanan norma o iç çarpım uzayının **doğal normu** denir. Bu bize, herhangi bir iç çarpım uzayının aynı zamanda normlu bir uzay olduğunu (yapılabileceğini) gösterir.

TANIM 1.18 HILBERT UZAYI

Bir $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ normuna göre tam ise **tam iç çarpım uzayı** ya da **Hilbert uzayı** denir.

Sonlu boyutlu her iç çarpım uzayı Hilbert uzayıdır. Nedenini açıklayınız.

$\mathbb{F}^n(\mathbb{F})$ uzayı üzerinde uygun bir iç çarpım tanımlayarak elde edilen iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz.

TANIM 1.19 ORTOGONAL (DİK) VEKTÖRLER

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir **iç çarpım uzayı** ve $f, g \in E$ olsun. O zaman

$$(1.13) \quad f \perp g \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0.$$

Örnek olarak, (1.10) da tanımlanan iç çarpıma göre, $w(x) \equiv 1, a = -1, b = 1$ alınırsa, $f(x) = 1$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları birbirine diktir, çünkü iç çarpımları sıfıra eşittir.

TANIM 1.20 ORTOGONAL / ORTONORMAL KÜME

E herhangi bir iç çarpım uzayı olsun.. Elemanları E kümesinden alınan ve her $m \neq n$ için, $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ şartını sağlayan herhangi bir $\{f_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ kümesine **ortogonal küme (dik küme)** denir. Her bir elemanın normu bire eşit olan ortogonal kümeye ise **ortonormal küme (birim dik küme)** denir.

TANIM 1.21 $C^m(A, B)$ UZAYI

$$C(A, B) = \{f \mid f : A \rightarrow B \text{ sürekli}\},$$

$$C^m(A, B) = \{f \mid f : A \rightarrow B, f^{(m)} \text{ sürekli}, m \in \mathbb{N}\}$$

Örnek 1.16 $E = C^m([a, b], \mathbb{R})$. Bu küme çoğunlukla $C^m([a, b])$ veya $C^m[a, b]$ şeklinde gösterilir. Bu küme üzerinde $\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$ iç çarpımı tanımlanabilir.

Örnek 1.17 $E = C^m([a, b], \mathbb{C})$. Bu küme üzerinde

$$(1.14) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x) \overline{g(x)} dx$$

bir iç çarpımdır. Bunu gösteriniz. (Burada $w(x) \geq 0$ ağırlık fonksiyonudur).

Problem 1.6 $\{\cos nx\}_{n=0}^\infty$ fonksiyonlar dizisinin $[0, \pi]$ -aralığında ortogonal bir küme oluşturduğunu gösteriniz. Dizi ortonormal midir? (ağırlık fonksiyonu $w(x)=1$ alınacak).

Problem 1.7 $\{\cos(nLx) \mid L > 0, n = 1, 2, 3, \dots\}$ kümesi hangi aralıkta ortogonaldır. Kümenin ortonormal olması için kümenin elemanları hangi sayılarla çarpılmalıdır?

TANIM 1.22 FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ

$f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$, $A \subset X$ olsun. O zaman

i) $f, x_0 \in A$ da **süreklidir**

$$\Leftrightarrow \{x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)\}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \ni \{\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\}$$

Eğer f her $x_0 \in A$ için sürekli ise, **A kümesi üzerinde süreklidir** denir.

ii) f, A kümesi üzerinde **düzgün süreklidir**

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \ni \{x, y \in A \text{ ve } \rho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon\}$$

TANIM 1.24 NOKTASAL YAKINSAKLIK

(B, σ) bir metrik uzay ve $\{f_n \mid f_n : (A, \rho) \rightarrow (B, \sigma), n = 0, 1, 2, \dots\}$ olsun. Eğer her $x_0 \in A$ için, $\{f_n(x_0), n = 0, 1, 2, \dots\}$ dizisi yakınsak ise, $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ fonksiyonlar dizisinin A kümesi üzerinde **noktasal yakınsadığı** söylenir.

TANIM 1.25 NORMLU UZAYLARDA YAKINSAKLIK

($E, \|\cdot\|$) bir normlu uzay, $A \subset E$ ve $f_k : A \rightarrow \mathbb{F}^n$ bir fonksiyonlar dizisi olsun. O zaman

i) $f_k \rightarrow f$ A üzerinde **noktasal yakınsak** $\Leftrightarrow$ her $x_0 \in A$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k(x_0) - f(x_0)\| = 0$

ii) $f_k \rightarrow f$ A kümesi üzerinde **düzgün yakınsak** $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_A = 0$ (*)

* Bu tanımda düzgün yakınsaklık için norm $\|f\|_A = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$ olarak alınacaktır.

Problem 1.8 $\{f_n \mid f_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ dizisinin $[0, 1]$ -aralığında noktasal yakınsak fakat düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

$\|f\| = \|f\|_{[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$ alınacak.

TANIM 1.26 KUVVET SERİLERİ

(1.15) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ şeklindeki bir seriye **kuvvvet serisi** denir.

TANIM 1.27 FONKSİYON SERİLERİ

(1.16) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x)$ şeklindeki bir seriye **fonksiyonlar serisi** denir.

TANIM 1.28 TAYLOR SERİSİ

(1.17) $f \in C^\infty(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ ise, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

serisine $f(x)$ fonksiyonun x_0 noktasındaki **Taylor seri açılımı** denir.

TEOREM 1.5 $f \in C^{(n+1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olsun. O zaman x_0 ile x arasında aşağıdaki eşitliği sağlayan bir ξ sayısı vardır

$$(1.18) \quad f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Buradaki $P_n(x)$ polinomuna **Taylor polinomu**, $R_n(x)$ 'e de **hata terimi** denir.

TANIM 1.29 Herhangi bir $f \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu verildiğinde

$$(1.20) \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_n \leq m, \quad D_j^{\alpha_k} f = \frac{\partial^{\alpha_k} f}{\partial x_j^{\alpha_k}}, \alpha_k \leq m$$

olmak üzere türevleri

$$(1.21) \quad D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f, \quad |\alpha|_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k, \quad k \leq m$$

sembolü ile gösterilebilir.

Örnek 1.19 $n = 2$ için

$$\begin{aligned} D^{(0,0)} f(x, y) &= f(x, y), \quad D^{(1,0)} f(x, y) = D_1^1 D_2^0 f(x, y) = D_1^1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \\ D^{(1,1)} f(x, y) &= D_1^1 D_2^1 f(x, y) = D_1^1 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

TANIM 1.30 TAYLOR SERİSİ (n-BOYUTLU UZAYLAR İÇİN)

$f \in C^\infty(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki Taylor seri açılımı

$$\begin{aligned} (1.23) \quad f(x) &= \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|_1=n} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha, \end{aligned}$$

$$\alpha \in \mathbb{N}^n, x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha|_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

olarak tanımlanır.

TANIM 1.31 REEL ANALİTİK FONKSİYON

Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun z_0 noktasında reel **analitik** olması için gerekli ve yeterli şart, z_0 noktasını içine alan bir I açık aralığı içinde

a) $f \in C^\infty(I)$ ve

b) f nin x_0 noktasındaki Taylor seri açılımında $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(z) = 0, \forall z \in I$, olmasıdır.

Uyarı: Bir fonksiyonun analitik olması için $f \in C^\infty(I)$ olması yeterli değildir. Örnek olarak

$$(1.24) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasında her mertebeden türevleri vardır ve $f^{(k)}(0) = 0$ dır. (Bunu türevin tanımını kullanarak gösteriniz). Ancak fonksiyon analitik değildir. Çünkü fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki Taylor serisi, hata terimi ile yazılırsa,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + R_n(x) = 0 + R_n(x)$$

olarak elde edilir ve dolayısıyla $R_n(x) = \exp(-1/x^2)$ olmak zorundadır, bu da bize $x = 0$ noktasını içine alan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in I$ şartını sağlayan hiçbir I açık aralığının olmadığını gösterir. Sonuç olarak $f \in C^\infty(I)$ olmasına rağmen, analitik değildir.

TANIM 1.33 REEL ANALİTİK FONKSİYON (genel)

a) $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$, $\mathbb{F}^n$ nin açık bir alt kümesi Ω da tanımlı ve $x_0 \in \Omega$ olsun. Eğer

$$(1.25) \quad f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} (x - x_0)^{\alpha}, \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

şartını sağlayan $c_{\alpha} = c_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \in \mathbb{F}$ ve $r > 0$ sayıları varsa f fonksiyonu x_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu şart her $x_0 \in \Omega$ için geçerli ise o zaman f, Ω içinde analitiktir denir. Burada $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa f reel analitik, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa f (kompleks) analitik olarak isimlendirilir.

b) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$, $\mathbb{R}^n$ nin açık bir alt kümesi Ω içinde tanımlı olsun. Eğer f nin bileşenlerinin her biri Ω içinde reel analitik ise o zaman f fonksiyonu Ω içinde reel analitiktir denir.

TANIM 1.34 ANALİTİK FONKSİYON ($n = 1$ için)

Bir $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında **analitik** olması için yeterli şart z_0 noktasının açık bir $B_r(z_0)$ komşuluğunda

a) $u, v \in C'$ ve

b) $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ **Cauchy-Riemann eşitliklerinin** sağlanmasıdır.

TANIM 1.35 $f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ tanımlı olsun. $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi

$$(1.26) \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında türevlenebildiği söylenir.

Örnek 1.20 $\exp(z), \sin(z), \cos(z), P(z) = \sum_{k=0}^m c_k z^k$ fonksiyonları $z \in \mathbb{R}$ ise her yerde reel analitik, $z \in \mathbb{C}$ ise her yerde analiktir.

TEOREM 1.6. $\{f_n \mid f_n \in C(E, \mathbb{F}), \forall n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer $\sum_0^\infty f_n$ serisi F fonksiyonuna E kümesi üzerinde düzgün yakınsarsa, F fonksiyonu E üzerinde süreklidir.

TEOREM 1.7. $\{f_n \mid f_n \in C(\bar{E}, \mathbb{F}), \forall n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer $\{f_n\}$ dizisi, $(E)^\circ$ kümesinde düzgün yakınsak ise $\bar{E}$ de de düzgün yakınsaktır. Burada $(E)^\circ = \text{iç}(E)$ dir.

SONUÇ 1.5. $\sum_0^\infty f_n(x), [0, \infty)$ -aralığında $F(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak, ve $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = b_n < \infty \forall n = 0, 1, 2, \dots$ sağlanmış olsun. O zaman $\sum_0^\infty b_n$ yakınsaktır ve $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \sum_0^\infty b_n$ dir.

TEOREM 1.8. $I \subset \mathbb{R}$ kompakt bir küme, $f_n \in C(I, \mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman, I kümesi üzerinde $f_n \rightarrow f$ düzgün yakınsaktır ve limitle integralin sırası değiştirilebilir:

$$(1.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$$

SONUÇ 1.6. $I \subset \mathbb{R}$ kompakt bir küme, $f_n \in C(I, \mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $\sum_0^\infty f_n$ serisi I kümesi üzerinde F fonksiyonuna düzgün yakınsarsa, o zaman

$$(1.28) \quad \int_I \left(\sum_0^\infty f_n(x) \right) dx = \sum_0^\infty \left(\int_I f_n(x) dx \right).$$

TEOREM 1.9. (Lebesgue) Her doğal sayı n için f_n fonksiyonları kompakt bir E kümesi üzerinde integrallenebilir ve E deki her x için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olsun. Eğer her doğal sayı n için, $\|f_n\|_E \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ şartını sağlayan bir M sayısı varsa o zaman $\int_E f_n = \int_E f$ sağlanır.

Not: Buradaki integrallenebilme Lebesgue anlamında integrallenebilmedir. Ancak, Riemann anlamında integrallenebilen (hemen hemen) her fonksiyon Lebesgue anlamında da integrallenebilir ve bu durumda fonksiyonun Riemann integrali Lebesgue integrailine eşittir.

TANIM 1.37 NOKTASAL YAKINSAKLIK (fonksiyon serileri için)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x), x_0 \text{ noktasında yakınsaktır} \Leftrightarrow s_n(x_0) = \sum_{k=0}^n c_k f_k(x_0) \text{ dizisi yakınsaktır.}$$

Buradaki $s_n(x_0) = \sum_{k=0}^n c_k f_k(x_0), (n = 0, 1, 2, \dots)$ dizisine **serinin kısmi toplamları** denir. Dolayısıyla serinin x_0 noktasında yakınsak olması için serinin kısmi toplamlarının oluşturduğu dizinin bu noktada yakınsak olması gerekli ve yeterlidir.

TANIM 1.38 DÜZGÜN YAKINSAKLIK (fonksiyon serileri için)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) A \text{ kümesinde } \mathbf{düzgün yakınsaktır} \Leftrightarrow s_n(x) A \text{ da düzgün yakınsaktır.}$$

TEOREM 1.10. (Weierstrass karşılaştırma teoremi): Eğer $\|f_k\|_E \leq M_k$ her $k \geq 0$ için sağlanır ve $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ yakınsak ise, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ serisi E kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

TANIM 1.39 VEKTÖRLERİN LİNEER KOMBİNASYONU ve $sp(A)$

E bir vektör uzayı ve $A = \{f_k \mid f_k \in E, k = 0, 1, 2, \dots, n\}$ olsun.

$$(1.29) \quad sp(A) = \{y \mid y = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n, \forall c_k \in \mathbb{F}\}$$

olarak tanımlanır. Burada sp İngilizce $span$ kelimesinin kısaltılmışıdır. Belirli bir $\{c_k\}_{k=0}^n$ sayıları için elde edilen, $c_0f_0 + c_1f_1 + \dots + c_nf_n$ toplamına $\{f_k\}_{k=0}^n$ vektörlerinin bir **lineer kombinasyonu** (*lineer bileşimi*) denir. Dolayısıyla, $sp(A)$ verilen vektörlerin bu şekilde oluşturulan **tüm** lineer kombinasyonlarını içerir. $sp(A)$, $\{f_k\}_{k=0}^n$ vektörlerini içinde bulunduran en küçük alt uzaydır.

TANIM 1.40 YOĞUN KÜME (Normlu uzaylar için)

$(E, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $S = \{f_k \mid k = 0, 1, \dots\} \subset E$ olsun. Eğer E nin herhangi bir elemanına, S nin elemanlarının sonlu bir lineer kombinasyonu ile istenildiği ölçüde yaklaşılabiliyse S ye E nin **yoğun** bir alt kümesidir denir (İng.: *spanning set*).

Yani, verilen her $f \in E$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle c_k ve N sayıları vardır ki

$$\left\| f - \sum_{k=0}^N c_k f_k \right\| < \varepsilon$$

sağlanır. Burada N sonsuz alınabilir, ancak bu durumda, tanımdaki sonlu lineer kombinasyon ifadesinin geçerli olması için, sadece sonlu sayıda c_k nın sıfırdan farklı olması gerekir.

TEOREM 1.11. (Weierstrass yaklaşım teoremi): Herhangi bir $f \in C([a, b], \mathbb{F})$

fonksiyonu için, verilen her $\varepsilon > 0$ değerine karşılık $P(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k$ şeklinde bir polinom vardır öyle ki $\|f - P\|_{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$ sağlanır. Yani polinomlar

uzayı $\mathbb{P} = \{P \mid P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{F} \text{ polinom}\}$, sürekli fonksiyonlar uzayı $C([a, b], \mathbb{F})$ içinde yoğundur.

Örnek 1.21 $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ kümesi, $C([a, b], \mathbb{R})$ sürekli fonksiyonlar uzayı içinde yoğundur.

Örnek 1.22 Rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ vektör uzayı içinde yoğundur.

Dikkat: Metrik uzaylardaki yoğun olma tanımı ile normlu uzaylardakini karşılaştırınız. Aslında aynı tanım, niçin?

Problem 1.9 $f_k(x) = e^{-kx}$ dizisinin ve $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ serisinin herhangi bir kompakt aralıkta düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 1.10 $\|f\|_A = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$ olsun. (f_n) fonksiyonlar dizisi A kümesi üzerinde düzgün yakınsak ise, aynı küme üzerinde noktasal yakınsaktır. Bunu ispatlayınız.

TEOREM 1.12. $f_k \in C(E, B)$, $\forall k \geq 0$. Eğer $\{f_k\}$ dizisi f fonksiyonuna E kümesi üzerinde düzün yakınsak ise, f fonksiyonu E kümesinde süreklidir.

TEOREM 1.13. $f_n \in C'(A, \mathbb{F})$, $\sum_0^\infty f_n(x)$ dizisi $F(x)$ fonksiyonuna (noktasal) yakınsak, türevlerin oluşturduğu $\sum_0^\infty f'_n(x)$ dizisi A kümesi üzerinde düzgün yakınsak olsun. O zaman $\sum_0^\infty f'_n(x) = F'(x)$, $\forall x \in A$ için sağlanır.

TEOREM 1.14. $\sum_0^\infty a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ise, o zaman seri $|x| < R$ kümesinin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır. Ayrıca seri $|x| < R$ açık kümesinin her noktasında türevlenebilir ve $f(x) = \sum_0^\infty f_n(x)$ ise $f'(x) = \sum_0^\infty f'_n(x)$ olur. Ayrıca, $f^{(k)}(x) = \sum_0^\infty a_n \frac{d^k}{dx^k} [x^n]$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, $|x| < R$ olur (yani seri istenildiği kadar **terim terim türevlenebilir**).

SONUÇ 1.14.1 $f(x) = \sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n$, x_0 noktasının bir açık komşuluğunda sağlanırsa, o zaman $a_n = f^{(n)}(x_0) / n!$ olması gerekir.

SONUÇ 1.14.2 $\sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n = \sum_0^\infty b_n (x - x_0)^n$, x_0 noktasının açık bir komşuluğunda sağlanırsa, o zaman $\forall n \geq 0$ için $a_n = b_n$ olur.

TEOREM 1.15 $\sum_0^\infty a_n x^n$, $(x \in \mathbb{R})$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun Eğer seri $x = R$ ($x = -R$) için de yakınsak ise, o zaman $[0, R]$ kapalı aralığında ($[-R, 0]$ aralığında) düzgün yakınsaktır.

TANIM 1.41 LİNEER DÖNÜŞÜM

Eğer $T : V(\mathbb{F}) \rightarrow W(\mathbb{F})$ fonksiyonu

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y), \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}$$

şartını sağlarsa bir **lineer dönüşüm** (transformasyon) olduğu söylenir.

TANIM 1.42 FONKSİYONEL

$f : V(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ şeklindeki fonksiyonlara **fonksiyonel** denir. Ayrıca eğer bu fonksiyon lineer ise, **lineer fonksiyonel** olarak isimlendirilir.

TANIM 1.43 ORTOGONAL / ORTONORMAL TAM KÜME

E bir iç çarpım uzayı ve $A = \{f_n \mid f_n \in E, n = 0, 1, 2, \dots\}$ ortogonal (ortonormal) bir küme olsun. Eğer $\{\langle f, f_n \rangle = 0, f \notin A, \forall n \geq 0\} \Rightarrow f = \mathbf{0}$ ise, A kümesine **ortogonal (ortonormal) tam küme** denir. Yani, A'nın tam olması için $E \setminus A$ da A'nın tüm elemanlarına dik başka bir elemanın bulunmaması gerekir.

TEOREM 1.16. GRAM-SCHMIDT YÖNTEMİ

Bir iç çarpım uzayı E'deki lineer bağımsız herhangi bir $\{f_n \mid f_n \in E, n = 0, 1, 2, \dots\}$ kümesinden aşağıdaki şekilde dik (ortogonal) bir küme elde edilebilir:

$$\text{i) } \varphi_0 = f_0$$

$$\text{ii) } \varphi_{m+1} = f_{m+1} - \sum_{k=0}^m \frac{\langle f_{m+1}, \varphi_k \rangle}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle} \varphi_k, \quad m = 0, 1, \dots$$

Bu yönteme **Gram-Schmidt ortogonalizasyon** (dikeltme) metodu veya **yöntemi** denir.

Problem 1.12 $\{x^k\}_{k=0}^4$ kümesinden $[-1, 1]$ -aralığında ortogonal olan bir küme elde ediniz.

Örnek 1.23 $\{\cos nx\}_{n=0}^\infty$ fonksiyonlar dizisi $[0, \pi]$ -aralığında bir ortogonal tam küme oluşturur. Bu küme $[0, 2\pi]$ -aralığında tam değildir. $\{\cos nx\}_{n=1}^\infty$ kümesi aynı aralıkta tam değildir. Bunları gösteriniz.

Örnek 1.24 $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^\infty = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ dizisi $[0, 2\pi]$ aralığında bir tam dik küme oluşturur.

TEOREM 1.18 $A = \{x^k\}_{k=0}^\infty$ kümesi, $C([a, b], \mathbb{R})$, ($[a, b]$: kompakt) sürekli fonksiyonlar uzayı içinde yoğundur.

İSPAT: $A = \{x^k\}_{k=0}^\infty$ kümesi polinomlar uzayı için bir tabandır, bu yüzden $sp(A) = \mathbb{P}$ olduğu açıktır. Burada $\mathbb{P}$, tüm polinomların oluşturduğu uzayı gösterir. Weierstrass yaklaşım teoremine göre $sp(\mathbb{P}) = C([a, b], \mathbb{R})$ sağlanır. Bu da $sp(A) = C([a, b], \mathbb{R})$ olmasını gerektirir. (Nedenini açıklayınız).♥

TANIM 1.44 İNTEGRALLENEBİLME

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir $\Leftrightarrow \int_a^b |f(x)| dx < \infty$

TANIM 1.45 $L_2[a, b]$ (= Karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı)

$$f \in L_2[a, b] \Leftrightarrow \langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Bu şekilde tanımlanan $L_2[a, b]$ kümesine $[a, b]$ aralığında **karesi** (Lebesgue anlamında) **integrallenebilen fonksiyonlar kümesi** (uzayı) denir.

Uyarı 1.1 *Riemann* anlamında karesi integrallenebilen fonksiyonların uzayı tam olmamasına karşılık *Lebesgue* anlamında karesi integrallenebilen fonksiyonların uzayı yani $L_2[a, b]$ tamdır.

Uyarı 1.2. *Riemann* anlamında integrallenebilen herhangi bir fonksiyon *Lebesgue* anlamında da integrallenebilir. Tersisi doğru değildir.

Uyarı 1.3. $L_2[a, b]$ uzayının normu

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

olarak tanımlanır ancak daha önce de belirtildiği gibi bu bir norm değildir, çünkü $\|f\| = 0$ mutlaka f fonksiyonun sıfır olmasını gerektirmez. Bu aksaklığı gidermek için **hemen hemen her yerde** kavramı geliştirilmiştir: $\|f\| = 0$ ise f hemen hemen her yerde sıfırdır. Örneğin

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x: \text{rasyonel} \\ 2, & x: \text{rasyonel değil} \end{cases}$$

fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında hemen hemen her yerde 2 ye eşittir. Bir küme içinde bir anlamda “önemsiz” sayılan kümelerin **ölçümü** sıfırdır. **Sayılamayan** kümelerin her **sayılabilir** alt kümesinin (Lebesgue) ölçümü sıfırdır. Örneğin, rasyonel sayılar kümesi reel sayılar kümesinin ölçümü sıfır olan bir alt kümesidir. Bir $[a, b]$ -aralığının (Lebesgue) ölçümü bu aralığın uzunluğuna eşittir. Bu bilgiler ışığında, $[a, b]$ aralığında $f = g$ (h.h.h.) demek bu fonksiyonların uzunluğu sıfır olan bir küme dışındaki noktalarda $f(x) = g(x)$ eşitliğini sağlaması demektir. Eğer $L_2[a, b]$ nin tüm elemanları $\tilde{f} = \{g \mid g = f \text{ (h.h.h.)}\}$ şeklinde denklik sınıflarına ayrılırsa ve bu sınıfların her biri

tek bir elemanmış gibi düşünülürse o zaman yukarıda tanımlanan fonksiyon bir norm olur. Ayrıca bu norma göre $L_2[a, b]$ uzayı tamdır.

TANIM 1.46 L_p UZAYLARI

$$f \in L_p[a, b] \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \quad (1 \leq p < \infty)$$

Bu uzay için norm, $L_2[a, b]$ uzayındakine benzer bir şekilde tanımlanır:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ (h.h.h.)}.$$

($f \in L_\infty[a, b] \Leftrightarrow \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|f\|_\infty$ olarak tanımlanır, ancak bu ölçüm teorisi gerektirdiği için daha fazla üzerinde durmayacağız. Ancak bir örnek vermek gerekirse $[a, b]$ aralığının sayılabilir bir alt kümesi üzerinde (daha doğrusu, ölçümü sıfır olan bir alt kümesi üzerinde) 1 değerini, diğer yerlerde ise 0 değerini alan bir f fonksiyonu için “ $\operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, b]} f(x) = 0$ ” dır. Burada *ess* İngilizce *essential* ($\approx$ esas/esaslı) kelimesinin kısaltılmışıdır. Sayılabilir bir kümenin Lebesgue ölçümü sıfırdır).

TEOREM 1.19 HÖLDER EŞİTSİZLİĞİ

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $f \in L_p[a, b]$, $g \in L_q[a, b]$ olsun. O zaman

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik bize $f \in L_p[a, b]$ ve $g \in L_q[a, b]$ ise çarpım fonksiyonu fg nin $L_1[a, b]$ uzayının bir elemanı olduğunu gösterir.

TEOREM 1.20 (MINKOWSKI EŞİTSİZLİĞİ)

$$f, g \in L_p[a, b] \Rightarrow \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

TEOREM 1.21 L_p uzayları tamdır.

TANIM 1.47 MUTLAK YAKINSAK SERİLER

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ serisi mutlak yakınsaktır} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \{a_n | n = 0, 1, 2, \dots\} \in l_1$$

$$\{a_n | n = 0, 1, 2, \dots\} \in l_1 \text{ için norm: } \|a_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

TANIM 1.48 KARESİ TOPLANABİLEN DİZİLER UZAYI : l_2

$$\{a_n | n = 0, 1, 2, \dots\} \in l_2 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

Bu uzay için norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|(a_n)\|_2 = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right\}^{1/2}, \quad (a_n) \in l_2$$

TANIM 1.49 l_p UZAYLARI

$$\{a_n | n = 0, 1, 2, \dots\} \in l_p \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < \infty \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$(1.30) \quad \{a_n | n = 0, 1, 2, \dots\} \in l_p \text{ için norm: } \|a_n\|_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p \right\}^{1/p}$$

TANIM 1.50 SINIRLI DİZİLER UZAYI : l_{∞}

$$\{a_n | n = 0, 1, 2, \dots\} \in l_{\infty} \Leftrightarrow \sup_n |a_n| < \infty$$

$$(1.31) \quad \|(a_n)\|_{\infty} = \sup_n |a_n| < \infty$$

TEOREM 1.22 SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ

Bir iç çarpım uzayındaki her x, y elemanı için

$$(1.32) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (\text{Schwarz eşitsizliği})$$

Burada norm $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ olarak alınır.

TEOREM 1.23 HÖLDER ve MİNKOWSKI EŞİTSİZLİKLERİ (Diziler için)

$1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$ sağlansın ve $(a_n), (c_n) \in l_p, (b_n) \in l_q$ olsun. O zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \| (a_n) \|_p \| (b_n) \|_q \quad (\text{Hölder eşitsizliği})$$

ve

$$\| (a_n + c_n) \|_p \leq \| a_n \|_p + \| c_n \|_p \quad (\text{Minkowski eşitsizliği})$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Problem 1.13 Schwarz eşitsizliğini ispat ediniz.

Problem 1.14 Herhangi bir iç çarpım uzayında, her x, y için

$$(1.31) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (\text{Paralelkener kuralı})$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

Problem 1.15 Herhangi bir iç çarpım uzayında, her x, y için

$$(1.33) \quad \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \frac{1}{2} \{ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \}$$

eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

TEOREM 1.23 Bir **reel** Banach uzayının (1.33)-iç çarpımı ile Hilbert uzayı olması için gerekli ve yeterli şart normunun paralel kenar kuralını sağlamasıdır.

Problem 1.16 Reel durumda (1.33) eşitliği $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \{ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \}$ olur.

Bunun bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

Problem 1.17 $f(x, y) = \frac{1}{4} \{ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \}$ fonksiyonunun x değişkenine göre lineer, y değişkenine göre sürekli olduğunu gösteriniz.

TANIM 1.52 AYRILABİLİR HİLBERT UZAYI

Eğer bir Hilbert uzayı sayılabilir elemanlı yoğun bir alt kümeye sahipse, **ayrılabilir Hilbert uzayı** (Ing. *Separable Hilbert space*) denir.

TANIM 1.53 **TABAN (Cebirsel taban)**

E bir vektör uzayı, A da E nin sonlu ya da sonsuz elemanlı bir alt kümesi olsun. Eğer

- i) A lineer bağımsız ve
- ii) E nin herhangi bir elemanı A nın sonlu sayıdaki vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak (tek bir şekilde) yazılabilirse

A kümesine E nin bir **cebirsel tabanı**dır denir.

Örnek 1.26 $B = \{e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ vektör uzayı için bir tabandır.

Örnek 1.27 $B = \{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ kümesi reel polinomlar uzayı için bir cebirsel tabandır.

TANIM 1.54 **TABAN (Genel)**

Bir A kümesinin, E vektör uzayının **tabanı** olması için

- i) A nın E vektör uzayının lineer bağımsız bir alt kümesi olması ve
- ii) E nin herhangi bir elemanının A nın sonlu ya da sonsuz sayıdaki vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak (tek bir şekilde) yazılabilmesi gerekir.

Dikkat: Vektör uzaylarındaki yoğun (spanning) küme ile taban arasındaki farka dikkat ediniz. Örnek olarak $\{x^k\}_0^{\infty}$ kümesi $C([a, b], \mathbb{R})$ uzayı için yoğun bir kümedir, ancak uzayın her elemanını bu kümenin sonlu ya da sonsuz lineer kombinasyonu olarak yazamayız. Mesela $|x|$ fonksiyonunu kümenin elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazmak mümkün değildir. Bununla beraber, ortonormal kümeler için durum farklıdır. Bu durumda

yoğun ortonormal küme = tam ortonormal küme = (ortonormal) taban

doğrudur.

Aşağıda yakınsaklıkla ilgili yeni bir tanım vereceğiz. Bu yakınsama şekli daha önce tanımlanan *norm içinde* yakınsamadır, ancak buradaki norm karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı için daha önce tanımladığımız (yarı) normdur. Hatırlanacağı gibi bunun norm olması için uzayın elemanlarını denklik sınıflarına ayırarak bu sınıfların her birini uzayın elemanları imiş gibi kabul etmek zorunda kalmıştık.

TEOREM 1.24 Ayrılabilir herhangi bir Hilbert uzayı için bir ortonormal tam küme vardır.

TANIM 1.53 ORTALAMA İÇİNDE YAKINSAMA

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı, $\{f_n : f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{F}, n = 0, 1, 2, \dots\} \subset E$ bir fonksiyonlar dizisi olsun. O zaman

$$\text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} f_n = f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_2(a,b)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = 0$$

şeklinde tanımlanan limit **ortalama içinde limit** olarak isimlendirilir. Buradaki **l.i.m.** İngilizce *limit in the mean* ifadesindeki baş harflerden alınmıştır.

Problem 1.18 Kompakt bir $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsak bir dizinin aynı zamanda ortalama içinde de yakınsak olduğunu gösteriniz. Aralık kompakt değilse durum ne olur? Örnek olarak, $[0, \infty]$ aralığında

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & , \quad 0 \leq x \leq n; \\ 0 & , \quad x > n \end{cases}$$

fonksiyonlar dizisini göz önüne alalım. $f_n \in L_2[0, \infty]$ olduğunu gösteriniz. Bu dizinin $f(x) \equiv 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteriniz. Dizi ortalama içinde yakınsak mı?